Concours d'Entrée

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Calculette non autorisée.

PROBLEME I

QUESTION 1 :

Soit M la matrice carrée d'ordre 3 :

$$M = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Déterminer les valeurs propres de la matrice M et les sous espaces propres associés.

QUESTION 2 :

Une entreprise désire prévoir chaque année l'indice de satisfaction de ses clients. Ceux ci sont classés en trois catégories : « satisfait » ; « indifférent » ; « mécontent ».

On note x_n,y_n et z_n les proportions de clients satisfaits, indifférents et mécontents.

A l'ouverture de l'entreprise (année 0) les clients sont tous considérés comme « indifférents ».

Pour effectuer une prévision on part des hypothèses décrites ci-dessous :

Un client satisfait une année a :

60% de chances de rester satisfait

20% de chances de devenir indifférent

20% de chances de devenir mécontent

l'année suivante.

Un client indifférent une année a :

50% de chances de devenir satisfait

40% de chances de rester indifférent

10% de chances de devenir mécontent

l'année suivante.

Un client mécontent une année a :

40% de chances de devenir satisfait

20% de chances de devenir indifférent

40% de chances de rester mécontent

l'année suivante.

a- Montrer que l'on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = A \times \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{bmatrix}$$ où A est une matrice carrée d'ordre 3 que l'on exprimera en fonction de la matrice M.

b-Montrer qu'il existe un unique triplet de proportions (x,y,z) de somme égale à 1 tel que :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Déduire que, si une année les proportions de satisfaits, indifférents et mécontents sont égaux à x,y et z, alors pour les années suivantes ces proportions restent constantes.

c- En remarquant que $z_n=1-x_n-y_n$ montrer que l'on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = B \times \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} + C$$ où B est une matrice carrée d'ordre 2 et C une matrice 2x1 dont on donnera les expressions.

En déduire l'expression de y_n puis l'expression de x_n.

Donner la limite des suites x_n , y_n et z_n quand n tends vers $+\infty$.

PROBLEME II

Soient k, a , b et c quatre réels strictement positifs.

On considère la suite notée $\{u_n, n \in N\}$ satisfaisant les relations :

$$\begin{cases} u_0 = a \ ; u_1 = b \ ; u_2 = c \\ u_{n+3}u_n = u_{n+1}u_{n+2} + k \end{cases}.$$

QUESTION 1 :

Vérifier que la suite $\{u_n, n \in N\}$ est bien définie par les relations données ci-dessus.

QUESTION 2 : On pose $\alpha = \dfrac{u_4 + u_0}{u_2}$.

(i) Montrer par récurrence que pour tout entier n on a : $u_{n+4} = \alpha \times u_{n+2} - u_n$.

(ii) Montrer que α peut s'écrire sous la forme $\dfrac{c}{a} + \dfrac{a}{c} + k\left(\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{c}\right)$. En déduire que α est strictement supérieur à 2.

(iii) Déduire de (i) et (ii) la forme générale des suites $\{u_{2n}, n \in N\}$ et $\{u_{2n+1}, n \in N\}$. Conclure que la limite de la suite $\{u_n, n \in N\}$ est égale à $+\infty$ ou 0. Montrer que la limite 0 est exclue par les relations définissant la suite.

QUESTION 3 : On prend pour cette *k=1* ; *(a,b,c)=(1,2, 3).*

Montrer que la suite $\{u_n, n \in N\}$ est à valeurs entières.

Donner l'expression du terme u_{2n}.

En remarquant que $u_1 = \dfrac{u_0 + u_2}{2}$ et $u_3 = \dfrac{u_2 + u_4}{2}$ montrer que le terme u_{2n+1} est égal à la moyenne arithmétique des termes d'ordre pair qui encadrent l'entier $2n+1$.

PROBLEME III

QUESTION 1 :

a - Montrer que les intégrales $\int_0^\infty \dfrac{1-\cos t}{t^{3/2}} dt$ et $\int_0^\infty \dfrac{\sin t}{t^{3/2}} dt$ sont absolument convergentes.

b- Déduire de (a) les convergences des intégrales :

$$I = \int_0^\infty \cos(x^2) dx \text{ et } J = \int_0^\infty \sin(x^2) dx .$$

Déduire également J>0.

Indication :

On pourra pour chacune des intégrales faire un changement de variable puis une intégration par parties.

LES QUESTIONS SUIVANTES ONT POUR BUT DE CALCULER LES INTEGRALES I ET J.

QUESTION 2 :

Sur R^+, ensemble des réels positifs on définit les fonctions C et S par :

$$C(t) = \int_0^t \cos(x^2) dx \ ; \ S(t) = \int_0^t \sin(x^2) dx .$$

On définit aussi les fonctions A et B par :

$A(t) = C^2(t) - S^2(t) \quad B(t) = 2C(t)S(t)$.

a- Montrer que les fonctions C et S sont bornées et dérivables sur R^+.

b- Montrer que les fonctions A et B sont dérivables sur R^+ et que leurs dérivées vérifient :

$$A'(t) = 2\int_0^{\pi/4} \cos\left(\frac{t^2}{\cos^2\theta}\right)\frac{t}{\cos^2\theta}d\theta .$$

$$B'(t) = 2\int_0^{\pi/4} \sin\left(\frac{t^2}{\cos^2\theta}\right)\frac{t}{\cos^2\theta}d\theta \ .$$

QUESTION 3 :

En utilisant le théorème figurant dans l'encadré ci-dessous donner les expressions (sous forme d'intégrales) des fonctions A et B.

Théorème :
Soient [a,b] un segment de R , Λ un intervalle de R ,K(x,y) une fonction réelle définie sur $[a,b]\times\Lambda$ *tels que :*

(i)K est continue.

(ii) $\frac{\partial K}{\partial y}(x,y)$ *existe et est continue sur* $[a,b]\times\Lambda$.

Alors la fonction $\int_a^b K(x,y)dx$ *définie sur* Λ *est dérivable et a pour dérivée* $\int_a^b \frac{\partial K}{\partial y}(x,y)dx$.

QUESTION 4 :

(i) On note K la fonction $t \to K(t) = \int_0^{\pi/4}\left[\int_0^t sin(\frac{y^2}{cos^2\theta})dy\right]d\theta$. En utilisant le théorème cité en question 3 vérifier que K(t) est dérivable et que K'(t) est égale à A(t).

En déduire que K(t) est égal à $\int_0^u A(t)dt$.

On note G la fonction définie sur R^+ par la relation $G(u) = \frac{1}{u}\int_0^u A(t)dt$.

Montrer l'égalité $G(u) = \frac{1}{u}\int_0^{\pi/4} \cos\theta.S(u/\cos\theta)d\theta$. En déduire $\lim_{u\to\infty} G(u)$.

(ii) On note H la fonction définie sur R^+ par la relation $H(u) = \frac{1}{u}\int_0^u B(t)dt$.

Montrer de la même manière l'égalité $H(u) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{u}\int_0^{\pi/4} \cos\theta.C(u/\cos\theta)d\theta$. En déduire $\lim_{u\to\infty} H(u)$.

QUESTION 5 :

Soit f une fonction continue sur R+ et telle que $\lim_{u\to\infty} f(u) = 0$.

a- Montrer que la fonction $F(t) = \frac{1}{t}\times\int_0^t f(u)du$ a pour limite 0 quand t tend vers ∞.

b- En déduire que si f est une fonction continue telle que $\lim_{u\to\infty} f(u) = \lambda$ alors $\lim_{t\to\infty} F(t) = \lambda$.

QUESTION 6 :

En appliquant (5°-b) aux fonctions G et H introduites à la question 4° donner la valeur des intégrales I et J.